

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФЕСТИВАЛЬ ЗОЛОТОЕ РУНО
6 класс. Алгебра и теория чисел—1. 04 июня 2010 года

1. На доске написано $4\ 9\ 2\ 5\ 2\ 1 = 100$. Поставьте знаки сложения, умножения и вычитания, чтобы получилось верное равенство.
2. Какое наибольшее количество натуральных чисел, не превосходящих 1000, можно выбрать так, чтобы для любых пяти выбранных чисел их сумма или произведение делилось на 5?
3. Найдите все простые p и q такие, что число $(p+1)^q$ является точным квадратом.
4. В числе $34! = 295232799039 \star 04140847618609643520 \star 00000$, как Вы можете заметить, мы забыли написать некоторые цифры и вместо них написали $\star$. А какие это были цифры?
5. Существуют ли семь, не обязательно различных, натуральных чисел, сумма которых равна их наименьшему общему кратному.
6. Два девятизначных числа $\overline{a_1a_2 \dots a_9}$ и $\overline{b_1b_2 \dots b_9}$ таковы, что при замене любой цифры a_i первого числа на соответствующую цифру второго числа b_i получается число, кратное 7 (например, числа $\overline{b_1a_2a_3a_4 \dots a_9}$, $\overline{a_1b_2a_3a_4 \dots a_9}$ и т. д.). Докажите, что при замене любой цифры второго числа на соответствующую цифру первого числа тоже будет получаться число, кратное 7.
7. Приведите пример трехзначного числа A , обладающего удивительным свойством: если натуральные числа m и n таковы, что $mn + 1$ делится на A , то и $m^2 - n^2$ делится на A .